

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Белгородский государственный технологический университет  
им. В.Г. Шухова

Дегтярь А.Н., Ковалев Л.А.

## **СПЕЦГЛАВЫ МЕХАНИКИ**

Утверждено советом университета в качестве  
учебного пособия для студентов направления  
151900.62 Конструкторско-технологическое  
обеспечение машиностроительных  
производств

Белгород 2013

УДК 531.11.12 + 620.10

ББК 22.21

Ю 85

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор Белгородского государственного университета *С.В. Сергеев*;

Доктор технических наук, профессор Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова *Г.А. Смоляго*

Ю 85 Спецглавы механики / А.Н. Дегтярь, Л.А.Ковалев – Белгород: Изд-во БГТУ им. В.Г. Шухова, 2013. – 45 с.

Изложены основы устойчивости твердых тел применительно к анализу инженерных конструкций. Рассмотрены вопросы теории малых колебаний и теории удара. Проведено согласование соответствующих курсов теоретической механики и спецглав механики.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 151900.62 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств

УДК 531.11.12 + 620.10

ББК 22.21

- © Дегтярь А.Н., Ковалев Л.А. 2013
- © Белгородский государственный технологический университет (БГТУ) им. В.Г. Шухова, 2013

## **ВВЕДЕНИЕ**

Специальные главы механики являются частью теоретической механики - фундаментальной дисциплины, изучаемой студентами всех технических направлений подготовки бакалавров и специалистов, и которая является базовой для большинства других дисциплин, связанных с проектированием и расчетом различных конструкций, сооружений, механизмов и машин.

Специальные главы механики состоят из трех частей: основы аналитической механики, теория колебаний и теория удара.

В настоящем учебном пособии рассматриваются теория колебаний и теория удара. Основы аналитической механики (вариационные принципы механики) рассмотрены в пособии [5].

Надеемся, что учебное пособие будет полезно всем, кто изучает и интересуется теоретической механикой.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тарг, С.М.* Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов / С.М. Тарг. - 10-е и последующие издания. - М.: Высшая школа, 1986 и др. - 416 с.
2. *Яблонский, А.А.* Курс теоретической механики. Ч. 1 и 2 / А.А. Яблонский. - М.: Высшая школа, 1971 и последующие издания.
3. *Никитин, Н.Н.* Курс теоретической механики: учеб. для машиностроит. спец. вузов / Н.Н. Никитин. - 5-е изд., перераб. и доп. - М: Высшая школа, 1990. - 607 с.
4. *Бать, М.И.* Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для втузов: в 3 т. Т. I. Статика и кинематика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. - 9-е изд., перераб. - М.: Наука, 1990. - 672 с; Т. II. Динамика. - 8-е изд., перераб. - М.: Наука, 1991.- 640 с.
5. *Ахтямов, А. В.* Вариационные принципы механики: учебное пособие / А.В. Ахтямов, Л.Н. Спиридонова, Е.Н. Новикова. - Белгород: Изд-во БГТУ, 2012. - 56 с.

## Раздел 1. Теория колебаний

**Колебаниями** называется процесс, сопровождающийся многократным чередованием возрастания и убывания некоторых физических величин.

Физическая природа колебательных процессов различна. Колебания могут быть механические, акустические, электромагнитные, в электрических контурах и т. д. Теория колебаний механических систем — один из самых обширных и развитых разделов теоретической механики, имеющий большое прикладное значение.

Изучение свойств колебательных движений необходимо для понимания многих физических явлений с которыми приходится сталкиваться в инженерной практике. Движение машин и механизмов практически всегда сопровождается возникновением колебаний или, как еще говорят, вибраций. Инженеру необходимо, с одной стороны, уметь бороться с колебаниями там, где они вредны, а с другой стороны, уметь использовать их, как полезный процесс в таких устройствах, как вибротранспортеры, виброуплотнители, сита и т. д.

Ниже рассматриваются малые колебания в системах с одной, двумя и конечным числом степеней свободы на основе применения уравнений Лагранжа.

Так как механическая система может совершать малые колебания только вблизи устойчивого положения равновесия, то в работе дано определение устойчивости положения равновесия системы и установлены условия, при выполнении которых положение равновесия является устойчивым.

### 1.1. Устойчивость положения равновесия механической системы

Рассмотрим механическую систему с голономными, стационарными и неосвобождающими связями с  $n$  степенями свободы, движение которой определяется обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$

В соответствии с принципом возможных перемещений в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю:

$$Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0.$$

Для консервативной системы эти условия принимают вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где  $\Pi$  — потенциальная энергия системы.

Уравнения (1.1) можно рассматривать как систему уравнений относительно обобщенных координат, представляющих собой условия экстремума потенциальной энергии  $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Решая их можно найти положения, в которых система будет находиться в равновесии.

Однако положение равновесия может быть **устойчивым, неустойчивым и безразличным**.

Если существует такое достаточно малое отклонение системы от положения равновесия, при котором она стремится вернуться назад, то такое положение равновесия будет **устойчивым**.

В случае, когда при любом начальном отклонении система удаляется от положения равновесия, положение равновесия будет **неустойчивым**. Если же при начальном отклонении система остается в отклоненном положении, то положение равновесия будет **безразличным**.

На рис. 1.1 представлены устойчивое (рис. 1.1,а) и неустойчивое (рис.1.1,б) положения равновесия математического маятника. Безразличное положение равновесия имеет система, приведенная на рис. 1.1,в.

При устойчивом положении равновесия система после достаточно малого начального возмущения совершает колебания около положения равновесия или возвращается в это положение без колебаний. При неустойчивом положении равновесия система после любого начального возмущения при дальнейшем движении все более удаляется от положения равновесия.

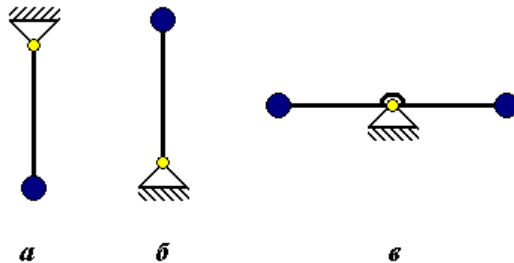


Рис. 1.1

Строгое определение понятия устойчивости положения равновесия было дано в конце XIX в. А.М.Ляпуновым. Условимся отсчитывать обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$  от положения равновесия, т. е. считать их в положении равновесия равными нулю. Выведем систему из положения равновесия, сообщив обобщенным координатам в начальный момент времени возмущения (отклонения  $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$  и скорости  $\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \dots, \dot{q}_{n0}$ ). Обозначим обобщенные координаты и их скорости при дальнейшем движении через  $q_1, q_2, \dots, q_n$  и  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  соответственно.

По Ляпунову, равновесие системы называется устойчивым, если для любого достаточно малого числа  $\varepsilon > 0$  можно выбрать два других таких малых числа  $\eta_1 > 0$  и  $\eta_2 > 0$ , что при удовлетворении начальными значениями обобщенных координат и скоростей неравенств  $q_{i0} < \eta_1$ ,  $\dot{q}_{i0} < \eta_2$  в любой момент времени все обобщенные координаты подчиняются условиям  $q_i < \varepsilon$ .

В противном случае равновесие называется неустойчивым. Безразличное положение равновесия в соответствии с данным определением относится к неустойчивым, поскольку при наличии начальной скорости система будет удаляться от начального положения.

Если при устойчивом положении равновесия все обобщенные координаты и скорости с течением времени стремятся к нулю

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то рассматриваемое положение равновесия называется **асимптотически устойчивым**.

Достаточное условие устойчивости положения равновесия консервативной системы определяется теоремой Лагранжа-Дирихле: **достаточным условием устойчивости положения равновесия консервативной системы является наличие в нем локального (изолированного) минимума потенциальной энергии**.

Однако в реальной механической системе всегда существуют силы сопротивления движению, возникающие благодаря трению или вязкости среды. Такие силы названы Кельвином **диссипативными**.

При наличии в системе диссипативных сил для оценки устойчивости положения равновесия можно дополнительно воспользоваться тремя теоремами Кельвина.

**1. Если положение равновесия консервативной системы устойчиво при одних только потенциальных силах, то оно будет оставаться устойчивым и при добавлении диссипативных сил.**

**2. Устойчивое положение равновесия становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией.**

**3. Изолированное и неустойчивое при одних потенциальных силах положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами.**

Доказательства этих теорем могут быть получены как следствие теоремы Ляпунова об устойчивости движения, выходящей за рамки данного курса.

Первые две теоремы Кельвина указывают на то, что диссипативные силы не могут нарушить устойчивость положения равновесия, а третья — что диссипативные силы не в состоянии трансформировать неустойчивое положение равновесия консервативной системы в устойчивое. Следовательно, для оценки устойчивости положения равновесия реальную колебательную систему с диссипативными силами можно заменить ее консервативной моделью.

Потенциальная энергия механической системы имеет постоянный знак и равна нулю только при нулевых значениях всех своих аргументов. В математике такие функции называются знакоопределенными. Следовательно, для того, чтобы положение равновесия механической системы было устойчивым необходимо и достаточно, чтобы в окрестности этого положения потенциальная энергия была положительно определенной функцией обобщенных координат.

Для линейных систем и для систем, которые можно свести к линейным при малых отклонениях от положения равновесия (линеаризовать), потенциальную энергию можно представить в виде квадратичной формы обобщенных координат

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{ij} q_i q_j, \quad (1.2)$$

где  $c_{ij}$  — обобщенные коэффициенты жесткости.

Обобщенные коэффициенты  $c_{ij}$  являются постоянными числами, которые могут быть определены непосредственно из разложения потенциальной энергии в ряд или по значениям вторых производных от



потенциальной энергии по обобщенным координатам в положении

равновесия:  $c_{ij} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$ .

Из этой формулы следует, что обобщенные коэффициенты жесткости симметричны относительно индексов  $c_{ij} = c_{ji}$ .

Для того, чтобы выполнялись достаточные условия устойчивости положения равновесия, потенциальная энергия должна быть положительно определенной квадратичной формой своих обобщенных координат.

В математике существует **критерий Сильвестра**, дающий необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичных форм.

**Квадратичная форма (1.2) будет положительно определенной, если определитель, составленный из ее коэффициентов, и все его главные диагональные миноры будут положительными, т.е. если коэффициенты  $c_{ij}$  будут удовлетворять условиям:**

$$D_1 = c_{11} > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad D_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

**Пример 1.1** Механическая система состоит из трубки  $AB$ , которая стержнем  $AO$  соединена с горизонтальной осью вращения, и шарика, который перемещается по трубке без трения и связан с точкой  $A$  трубки пружиной (рис. 1.2). Длина стержня  $AO = 2 \cdot l_1 = 0,5$  м, длина трубки  $AB = 2 \cdot l_2 = 0,5$  м, длина недеформированной пружины  $l_2 = 0,25$  м, жесткость пружины  $c = 100$  Н/м. Масса трубки  $m_2 = 2$  кг, стержня -  $m_1 = 1$  кг и шарика -  $m_3 = 0,5$  кг.

Определить положения равновесия системы и оценить их устойчивость.

**Решение.** Запишем выражение для потенциальной энергии рассматриваемой системы. Она складывается из потенциальной энергии трех тел, находящихся в однородном поле силы тяжести, и потенциальной энергии деформированной пружины.

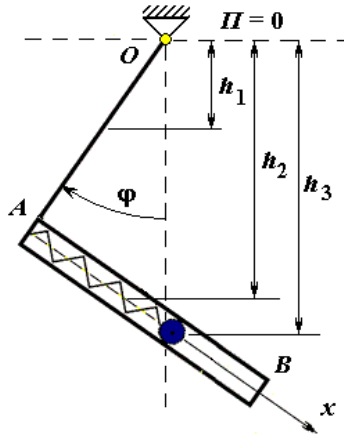


Рис. 1.2

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести равна произведению веса тела на высоту его центра тяжести над плоскостью, в которой потенциальная энергия считается равной нулю. Пусть потенциальная энергия равна нулю в плоскости, проходящей через ось вращения стержня  $OD$ , тогда для сил тяжести

$$\begin{aligned} \Pi_{mg} &= \Pi_{OA} + \Pi_{AB} + \Pi_m = -m_1 g h_1 - m_2 g h_2 - m_3 g h_3 = \\ &= -m_1 g l_1 \cos \varphi - m_2 g [l_1 \cos \varphi + l_2 \sin \varphi] - m_3 g [l_1 \cos \varphi + x \sin \varphi] \end{aligned}$$

Для силы упругости потенциальная энергия определяется величиной деформации  $\Delta = l_2 - l_2^0$  и равна  $\Pi_1 = \frac{c \Delta^2}{2} = \frac{c (l_2 - l_2^0)^2}{2}$ .

$$\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_1.$$

Найдем возможные положения равновесия системы. Значения координат в положениях равновесия есть корни следующей системы уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= m_1 g l_1 \sin \varphi + m_2 g [l_1 \sin \varphi - l_2 \cos \varphi] - m_3 g [l_1 \sin \varphi - x \cos \varphi] \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= -m_3 g \sin \varphi + c (l_2 - l_2^0) = 0 \end{aligned}$$

Получили два трансцендентных уравнения. Решая эту систему с помощью численных методов, получаем два возможных положения равновесия:

$$1. \quad \varphi_1 = 0,400 \text{ рад, } (22,9^\circ) \quad x_1 = 0,269 \text{ м.}$$

$$2. \quad \varphi_2 = 3,53 \text{ рад, } (180^\circ + 22,2^\circ) \quad x_2 = 0,231 \text{ м.}$$

Для оценки устойчивости полученных положений равновесия найдем все вторые производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам и по ним определим обобщенные коэффициенты жесткости.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} = -m_3 g \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = m_1 + 2m_2 + 2m_3 \overline{g} l_1 \cos \varphi + m_2 l_2 + m_3 x \overline{g} \sin \varphi$$

Тогда для первого положения равновесия

$$c_{11} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \right)_1 = 100, \quad c_{12} = c_{21} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} \right)_1 = -4,52,$$

$$c_{22} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_1 = 15,98.$$

Воспользуемся критерием Сильвестра

$$\Delta_1 = c_{11} = 100 > 0, \quad \Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1577 > 0.$$

Для второго найденного положения равновесия

$$c_{11} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \right)_2 = 100, \quad c_{12} = c_{21} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} \right)_2 = 4,54,$$

$$c_{22} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_2 = -15,91.$$

$$\Delta_1 = c_{11} = 100 > 0, \quad \Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = -1611 < 0.$$

Таким образом, первое положение равновесия устойчиво, второе - неустойчиво.

## 1.2 Дифференциальные уравнения движения системы с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $N$  материальных точек и имеющую  $n$  степеней свободы, на которую наложены голономные стационарные связи. Предполагая, что система

имеет устойчивое положение равновесия, будем отсчитывать от этого положения обобщенные координаты  $q_i$  ( $i=1,2,...,n$ ).

В общем случае сила, действующая на  $i$ -ю точку системы, может быть функцией от положения точки  $\vec{r}_i$ , ее скорости  $\vec{v}_i$  и времени. С учетом малости колебаний представим  $\vec{F}_i$  в виде

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\Pi} + \vec{F}_i^{\Phi} + \vec{P}_i \quad (1.3)$$

где все силы  $\vec{F}_i^{\Pi}$  — потенциальные, и будем полагать, что силы  $\vec{F}_i^{\Phi}$  являются диссипативными, т.е. уменьшающими полную механическую энергию, и линейно зависящими от скорости,  $\vec{P}_i$  — силы, зависящие от времени и действующие извне:

$$\vec{F}_i^{\Phi} = -h_i \cdot \vec{v}_i \quad (1.4)$$

Согласно (1.3), представим обобщенную силу  $Q_i$  в виде

$$Q_i = Q_{i\Pi} + Q_{i\Phi} + Q_i$$

где  $Q_{i\Pi}$  — составляющая обобщенной силы от потенциальных сил;  $Q_{i\Phi}$  — составляющая обобщенной силы от диссипативных сил;  $Q_i$  — составляющая обобщенной силы от сил, зависящих от времени и действующих извне.

Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_{i\Pi} + Q_{i\Phi} + Q_i \quad (i=1,2,...,n)$$

В общем случае система дифференциальных уравнений, описывающих движение механической системы, имеет достаточно сложный вид и не может быть проинтегрирована в конечном виде. С учетом характера движения около устойчивого положения равновесия в предположении малости обобщенных координат, отсчитываемых от положения равновесия, и обобщенных скоростей возможна линеаризация системы дифференциальных уравнений движения.

Потенциальную энергию представим квадратичной формой по обобщенным координатам:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{ij} q_i q_j, \quad c_{ij} = \text{const.}$$

Кинетическую энергию при движении механической системы около устойчивого положения равновесия представим квадратичной формой по обобщенным скоростям.

$$\text{Так как } \bar{v}_i = \sum_j \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad \text{то}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$\text{где } a_{ij} = \sum_k m_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad \text{при этом } a_{ij} = a_{ji}.$$

Разложим функции  $a_{ij}$  в ряд в окрестности положения равновесия:

$$a_{ij} = a_{ij} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_1} q_1 + \dots$$

и подставим их в выражение для кинетической энергии.

Пренебрегая членами ряда, имеющими третий порядок малости относительно величин  $q_j$  и  $\dot{q}_j$ , и считая обобщенные скорости малыми величинами, получим приближенное выражение кинетической энергии. Оно отличается от точного тем, что функции  $a_{ij}$  заменяются их значениями в положении равновесия:

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{q_1=0, \dots, q_n=0} \quad \text{— обобщенные коэффициенты инерции,}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = \text{const.}$$

Квадратичные формы для потенциальной и кинетической энергий положительно определенные (первая — из устойчивости положения равновесия; вторая — из определения кинетической энергии).

Введем функцию  $\Phi$ , которую называют **диссипативной функцией Рэля**. Диссипативную функцию Рэля  $\Phi$  представим квадратичной формой по обобщенным скоростям:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_k h_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j b_{ij} q_1, \dots, q_n \dot{q}_i \dot{q}_j$$

где  $b_{ij} q_1, \dots, q_n = \sum_k h_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$  при этом  $b_{ij} = b_{ji}$ .

Разложим функции  $b_{ij} q_1, \dots, q_n$  в ряд в окрестности положения равновесия:

$$b_{ij} q_1, \dots, q_n = b_{ij} q_1, \dots, 0 + \left. \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_1} \right|_{q_1=0, \dots, q_n=0} q_1 + \dots$$

и подставим их в выражение для диссипативной функции Рэля.

Пренебрегая членами ряда, имеющими третий порядок малости относительно величин  $q_j$  и  $\dot{q}_j$ , и считая обобщенные скорости малыми величинами, получим приближенное выражение кинетической энергии. Оно отличается от точного тем, что функции  $b_{ij} q_1, \dots, q_n$  заменяются их значениями в положении равновесия:

$$b_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{q_1=0, \dots, q_n=0} \quad \text{— обобщенные диссипативные коэффициенты.}$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad b_{ij} = \text{const.}$$

В общем случае  $\Phi$  представляет собой неотрицательную квадратичную форму. Если же  $\Phi$  является положительно-определенной квадратичной формой, диссипация называется **полной**.

Определим обобщенные силы, входящие в уравнения Лагранжа второго рода.

Составляющая обобщенной силы от потенциальных сил равна

где  $P_{\text{с}}^{\text{п}}$  — потенциальная энергия системы, отсчитываемая от положения равновесия.

$$Q_{i\phi} = \sum \overline{F_k^\phi} \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} = -\sum h_k \overline{v_k} \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i} = -\sum h_k \overline{r_k} \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_i}.$$

Тогда  $Q_{i\Phi} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i} = -\sum_j b_{ij}\dot{q}_j$

$$Q_i \equiv \frac{\sum \delta A_k}{\delta q_i}$$
$$\sum_j (a_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} q_j) = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.5)$$

Дифференциальные уравнения движения линейной системы с конечным числом степеней свободы и имеют вид (1.5), или в развернутой форме

[illegible]

Введем обозначения для вещественных симметрических квадратных размера  $n \times n$  матриц инерционных, диссипативных и квазиупругих коэффициентов:

$$\mathbf{A} = \left\|_{ij} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right\|; \quad \mathbf{B} = \left\|_{ij} \right\|; \quad \mathbf{C} = \left\|_{ij} \right\|.$$

а также для матриц-столбцов (векторов) обобщенных координат системы и соответствующих им обобщенных возмущающих сил:

$$\mathbf{q} = \left\|_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \right\|; \quad \mathbf{Q} = \left\|_j \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \right\|.$$

Тогда уравнения движения можно представить в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}.$$

Эта система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в рамках сделанных ограничений, описывает движение механической системы около устойчивого положения равновесия. В данном курсе ограничимся рассмотрением малых колебаний систем с одной и двумя степенями свободы.

### 1.3. Дифференциальные уравнения движения линейной системы с одной степенью свободы

В частном случае системы с одной степенью свободы квадратичные формы  $T$ ,  $\Pi$  и  $\Phi$  будут соответственно

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}^2 = \frac{1}{2} a \dot{q}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} c_{11} q^2 = \frac{1}{2} c q^2;$$

$$\Phi = \frac{1}{2} b_{11} \dot{q}^2 = \frac{1}{2} b \dot{q}^2;$$

а дифференциальные уравнения малых колебаний примут вид



$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q \quad (1.6)$$

где коэффициент  $a > 0$  называется **обобщенным инерционным коэффициентом**, коэффициент  $c > 0$  называется **квазиупругим коэффициентом**, коэффициент  $b \geq 0$  называется **обобщенным диссипативным коэффициентом**.

Уравнение (1.6) представляет собой дифференциальное уравнение движения любой линейной колебательной системы с одной степенью свободы. Разделив каждый член этого уравнения на обобщенный инерционный коэффициент  $a$ , получим по аналогии с рассмотренными выше примерами

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = \frac{1}{a} Q \quad (1.7)$$

где  $2\varepsilon = b/a$ ,  $\omega^2 = c/a$ .

Наличие в механической системе хотя бы одного упругого (деформируемого) тела автоматически превращает ее в систему с бесконечным числом степеней свободы, поскольку у таких тел каждая материальная частица имеет возможность двигаться относительно других материальных частиц и, следовательно, ее движение должно описываться своими обобщенными координатами, а таких частиц бесконечное множество.

В теоретической механике используется модель абсолютно твердого тела, для описания движения которого требуется конечное число координат, а все упругие элементы — пружины принимаются безынерционными, т. е. масса их считается пренебрежимо малой по сравнению с массами твердых тел, входящих в систему. Только в этом случае можно говорить о системе с конечным числом степеней свободы.

#### 1.4. Свободные движения линейной системы с одной степенью свободы

Свободные движения в колебательной системе возникают при отсутствии внешнего воздействия  $Q \equiv 0$ , они вызваны начальным возмущением. В соответствии с (1.6) дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0.$$

### Свободные движения линейной консервативной системы

В случае консервативной системы  $b = 0$  и дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (1.8)$$

где  $\omega^2 = c/a$ . Постоянная величина  $\omega$  называется **круговой**, (или **циклической**) **частотой** и измеряется в секундах в минус первой степени ( $1/c$ );

Дифференциальное уравнение (1.8) является однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение этого уравнения ищем в виде  $q = e^{\lambda t}$ . После подстановки этого выражения в (1.8) получаем характеристическое уравнение  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ . Это уравнение имеет два чисто мнимых корня  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ .

На основе теории дифференциальных уравнений решение уравнения (1.8) можно представить в виде

$$q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (1.9)$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из начальных условий:

$$\text{при } t = 0, \quad q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0. \quad (1.10)$$

Отсюда  $C_1 = q_0$ ;  $C_2 = \dot{q}_0 / \omega$ .

Решение (1.9) принимает вид

$$q = q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Представим решение (1.9) в другой, так называемой амплитудной форме:

$$q = A \sin \omega t + \alpha \quad (1.11)$$

Постоянные  $A$  и  $\alpha$  выражаются через начальные условия:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega}\right)^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{q_0 \omega}{\dot{q}_0}.$$

Величину  $A$  называют **амплитудой колебаний**. Она определяет наибольшее отклонение обобщенной координаты от положения равновесия, соответствующего значению  $q = 0$ . Обобщенная координата  $q$  изменяется в пределах от  $+A$  до  $-A$ .

Безразмерная постоянная  $\alpha$  называется **начальной фазой колебаний**. Она является значением фазы колебаний  $\omega \cdot t + \alpha$  при  $t = 0$ . Начальная фаза может изменяться в пределах от  $0$  до  $2\pi$ . Для определения начальной фазы  $\alpha$  по начальным условиям можно использовать любую комбинацию двух ее тригонометрических функций, например  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ .

Движение системы, определяемое выражением (1.11), называется **гармоническим колебанием**. Гармоническими называются такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса. Изменением фазы на  $\pi/2$  от синуса можно перейти к косинусу.

Зависимость  $q(t)$  представлена на рис. 1.3.

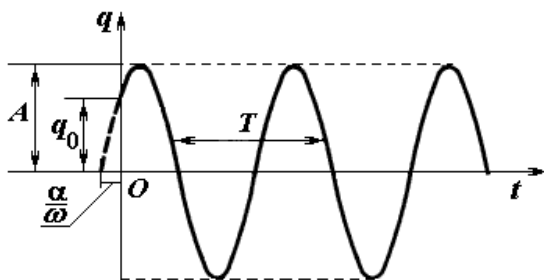


Рис. 1.3

Обобщенная координата  $q$  является периодической функцией. Значение периода  $T$  для переменной  $t$  получим из условия:

$$\omega(t+T) + \alpha = \omega t + \alpha + 2\pi; \Rightarrow T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{a/c}.$$

$T$  — **период колебаний** — время в секундах, за которое фаза колебаний изменится на угол  $2\pi$ .

В инженерной практике используют величину, обратную периоду колебаний, называемую **частотой колебаний**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

и измеряемую в герцах (Гц).

Круговая частота  $\omega$ , период колебаний  $T$  и частота  $\nu$  не зависят от начальных условий, поэтому их называют собственными характеристиками колебательной системы (например, собственная частота колебаний). Свойство независимости частоты и периода колебаний от начальных условий — свойство изохронности колебаний — связано с линейностью дифференциального уравнения и, следовательно, с допущением о малости колебаний.

**Свободные движения линейной системы являются гармоническими колебаниями. Амплитуда этих колебаний — величина постоянная и определяется начальными условиями. Период колебаний тоже величина постоянная, не зависящая от амплитуды и, следовательно, от начальных условий.**

**Пример 1.2.** Груз, имеющий силу тяжести  $P = 20$  Н, подвешен на пружине (рис. 1.4). Статическое удлинение пружины под действием силы тяжести груза  $\lambda_{\text{ст}} = 5$  см.

Определить движение груза, если в начальный момент удлинение пружины  $\lambda_0 = 8$  см и начальная скорость груза  $v_0 = 10$  см/с и направлена вниз.

**Решение.** Груз будет двигаться прямолинейно. За начало отсчета расстояний  $x$  выберем положение статического равновесия груза, при котором сила тяжести  $P$  уравнивает силу упругости пружины  $F$ , направив ось  $Ox$  вниз по траектории движения груза. Силу упругости пружины считаем пропорциональной ее удлинению из недеформированного состояния.

Пусть груз в момент времени  $t$  находится на расстоянии  $X$  от начала отсчета. На него действуют сила тяжести  $\bar{P}$  и сила упругости  $\bar{F}$ , причем

$$F = c\lambda = c(\lambda_{\text{ст}} + x),$$

где  $\lambda_{\text{ст}} + x$  — удлинение пружины;  $c$  — коэффициент жесткости.

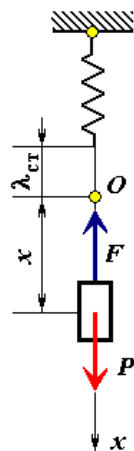


Рис. 1.4

В положении статического равновесия груза  $x = 0$ ,  $F = c\lambda_{\text{ст}} = P$ .  
Следовательно,  $c = P/\lambda_{\text{ст}}$ .

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения груза в общем случае имеет вид

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix}.$$

В рассматриваемом случае

$$\sum F_{ix} = P - F = P - c(\lambda_{\text{ст}} + x) = -cx = -cx.$$

Следовательно,

$$m\ddot{x} = -cx; \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0; \quad \omega = \sqrt{c/m}.$$

Если за начало отсчета выбрать не положение статического равновесия, то уравнение будет иметь постоянную правую часть, т. е. будет неоднородным. Решение дифференциального уравнения можно выразить в следующей форме:

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t); \quad v = \dot{x} = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t).$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются по начальным условиям: время  $t = 0$  начальная скорость  $\dot{x} = v_0 = 10$  см/с;

$$x = x_0 = \lambda_0 - \lambda_{\text{ст}} = 8 - 5 = 3 \text{ см};$$

$$\omega = \sqrt{c/a} = \sqrt{g/\lambda_{\text{ст}}} = \sqrt{980/5} = 14 \text{ с}^{-1}$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , согласно формулам для  $x$  и  $\dot{x}$  при  $t = 0$ , имеют значения

$$C_1 = x_0 = 3 \text{ см}; \quad C_2 = v_0/\omega = 0,71 \text{ см}.$$

Уравнение движения груза принимает вид

$$x = 3 \cos(14t) + 0,71 \sin(14t).$$

Приведем его к амплитудной форме. Амплитуда

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{9 + 0,50} \approx 3,08 \text{ см}.$$

Для начальной фазы  $\alpha$   $\sin \alpha = C_1/A = 0,97$ ;  
 $\cos \alpha = C_2/A = 0,23 > 0$ .

Следовательно, угол  $\alpha$  находится в первой четверти и по значению, например,  $\sin \alpha$  получаем  $\alpha = 1,33 = 0,42\pi$ . Уравнение движения груза в амплитудной форме имеет вид

$$x = 3,08 \sin(4t + 0,42\pi) \text{ см.}$$

Период собственных гармонических колебаний груза

$$T = 2\pi/\omega = 0,45 \text{ с.}$$

### **Свободные движения линейной неконсервативной системы**

В самом общем случае дифференциальное уравнение свободного движения такой системы в соответствии с (1.7) имеет вид

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (1.12)$$

где  $\varepsilon = b/2a$  — коэффициент затухания, единица измерения которого (рад/с) совпадает с единицей измерения  $\omega$ .

Дифференциальное уравнение (1.12) является однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение этого уравнения ищем в виде  $q = e^{\lambda t}$ . После подстановки этого выражения в (1.12) получаем характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega^2 = 0$ , корни которого

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}. \quad (1.13)$$

Характер движения системы будет существенно зависеть от соотношения между величинами  $\varepsilon$  и  $\omega$ . Возможны следующие три случая:

при  $\varepsilon < \omega$  — случай малого сопротивления — уравнение (1.13) имеет комплексно-сопряженные корни;

при  $\varepsilon = \omega$  — случай критического сопротивления — уравнение (1.13) имеет кратные корни;

при  $\varepsilon > \omega$  — случай большого сопротивления — уравнение (1.13) имеет два вещественных отрицательных корня.

Рассмотрим эти случаи по отдельности.

**1. Случай малого сопротивления:**  $\varepsilon < \omega$ ;  $\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega_1$ ,

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$ .

Общее решение дифференциального уравнения (1.12) будет иметь вид

$$q = e^{-\varepsilon t} [C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t]$$

или

$$q = Ae^{-\varepsilon t} \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (1.14)$$

При начальных условиях (1.10)  $C_1 = q_0$ ;  $C_2 = \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{\omega_1}$ ,

а постоянные  $A$  и  $\alpha$  определяются выражениями:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left( \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{\omega_1} \right)^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{q_0 \omega_1}{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}.$$

Начальная фаза  $\alpha$  может изменяться в пределах от 0 до  $2\pi$ . Для определения начальной фазы  $\alpha$  по начальным условиям можно использовать любую комбинацию двух ее тригонометрических функций, например  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ .

Графически решение (1.14) приведено на рис. 1.5. Оно представляет собой синусоидальную кривую, расположенную между экспоненциальными ограничивающими кривыми  $Ae^{-\varepsilon t}$  и  $-Ae^{-\varepsilon t}$ .

Колебания такого вида называются **затухающими**.

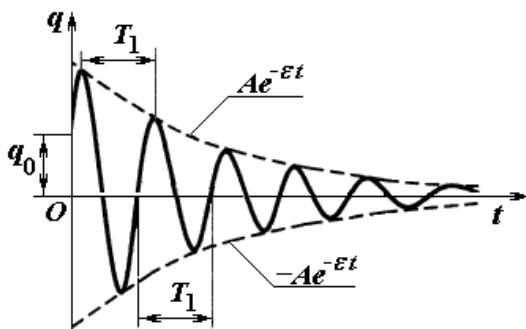


Рис. 1.5

Затухающие колебания не являются периодическим движением, однако сохраняют его некоторые свойства. Действительно, решение (1.14) представляет собой произведение двух функций — экспоненты, которая не обращается в нуль, и синусоиды с периодом  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ . Это обстоятельство приводит к чередованию через равный промежуток времени  $T_1$  нулей и максимумов  $q$  (рис. 1.5), что позволяет считать затухающие колебания условно-периодическими.

Величину  $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$  называют **условным периодом** затухающих колебаний. Условный период затухающих колебаний больше периода свободных колебаний консервативной системы  $T$ .

Величину  $\omega_1$  называют **условной частотой** затухающих колебаний. При малых значениях коэффициента затухания  $\varepsilon \ll \omega$  условная частота затухающих колебаний примерно равна частоте свободных колебаний ( $\omega_1 \approx \omega$ ), аналогично  $T_1 \approx T$ . Величину  $Ae^{-\varepsilon t}$  можно назвать **условной амплитудой** затухающих колебаний.

Решение (1.14) показывает, что затухающие колебания должны продолжаться сколь угодно долго, поскольку  $q$  обращается в нуль только при  $t \rightarrow \infty$ . Однако это не соответствует опыту наблюдения колебаний в реальных системах, которые всегда заканчиваются за конечный промежуток времени. Данное противоречие есть результат того, что в расчетной схеме не учитывались другие виды сопротивлений, кроме линейно-вязкого. Величина  $\tau_0 = 1/\varepsilon$  называется **постоянной времени** затухающих колебаний и измеряется в секундах.

За каждый промежуток времени  $\tau_0$  условная амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз. Обычно полагают, что по истечении времени, равного  $3\tau_0$ , затухающие колебания можно условно считать прекратившимися.

**Декрементом колебаний**  $D$  называют отношение двух последовательных (взятых через условный период  $T_1$ ) максимальных значений обобщенной координаты.

$$D = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{\varepsilon T_1}.$$



**Логарифмическим декрементом колебаний  $\lambda$**  называют натуральный логарифм от декремента колебаний:

$$\lambda = \ln D = \varepsilon T_1.$$

Логарифмический декремент колебаний удобен для характеристики медленно затухающих колебаний, когда  $\varepsilon \ll \omega$ .

Из проведенного исследования можно заключить, что **малое линейное сопротивление незначительно увеличивает период колебаний по сравнению со случаем отсутствия сопротивления, но сильно уменьшает последовательные значения условных амплитуд, которые уменьшаются с течением времени по экспоненциальному закону.**

## 2. Случай критического сопротивления: $\varepsilon = \omega$ ; $\lambda_{1,2} = -\varepsilon$ .

При кратных корнях общее решение дифференциального уравнения (1.12) имеет вид

$$q = e^{-\varepsilon t} (C_1 + C_2 t). \quad (1.15)$$

Произвольные постоянные определим из начальных условий (1.10):

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \dot{q}_0 + \varepsilon q_0.$$

Решение (1.15) представляет собой произведение экспоненты в отрицательной степени и линейной функции времени. Из математики известно, что экспонента в отрицательной степени убывает быстрее, чем возрастает любая степенная функция. Поэтому решение (1.15) стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

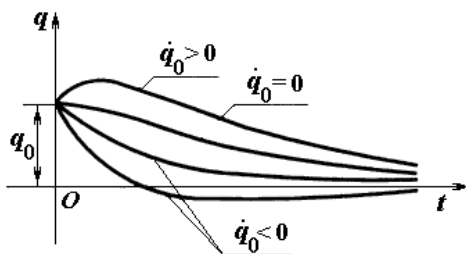


Рис. 1.6

На рис. 1.6 представлено решение (1.15) при различных начальных условиях. Видно, что движение не имеет колебательного

характера и отсутствуют какие-либо признаки периодичности. Такое движение называют **апериодическим**, а с учетом рассмотрения критического сопротивления — **предельно апериодическим**.

**3. Случай большого сопротивления:**  $\varepsilon > \omega$ ;  $\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm k$ ,

где  $k = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$ . Поскольку  $k < \varepsilon$ , оба корня характеристического уравнения будут отрицательными.

Общее решение дифференциального уравнения (1.12) в этом случае имеет вид

$$q = e^{-\varepsilon t} (C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}).$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определим из начальных условий (1.10)

$$C_1 = \frac{1}{2} \left( q_0 + \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{k} \right); \quad C_2 = \frac{1}{2} \left( q_0 - \frac{\dot{q}_0 + \varepsilon q_0}{k} \right).$$

Движение в случае сопротивления, большего критического, также имеет **апериодический** характер, аналогичный представленному на рис. 1.6.

### 1.5. Вынужденные колебания линейной системы с одной степенью свободы

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы имеет вид (1.7).

В случае, когда обобщенная сила  $Q$ , характеризующая внешнее воздействие на колебательную систему, изменяется во времени по закону синуса или косинуса имеет место гармоническое возбуждение колебаний.

$$Q = Q_0 \sin(pt + \beta),$$

где  $Q_0$ ,  $p$ ,  $\beta$  — соответственно амплитуда, частота и начальная фаза обобщенной силы.

**Способы возбуждения вынужденных колебаний.**

**Определение обобщенной силы  $Q$**

Способы возбуждения колебаний можно условно разделить на группы. На рис. 1.7 приведены три наиболее характерных способа

возбуждения вынужденных колебаний простейшей колебательной системы. Система представляет собой тело массой  $m$ , имеющее возможность двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. С телом скреплена пружина, жесткость которой  $c$ . Обобщенная координата  $x$  отсчитывается от положения равновесия системы (при отсутствии внешнего воздействия), когда пружина не напряжена.

**1. Силовое возбуждение** (рис. 1.7, а). Система находится под воздействием силы  $F \llcorner = F_0 \sin \llcorner \phi t + \beta \rceil$ , приложенной извне и не зависящей от параметров системы.

В этом случае для получения  $Q \llcorner$  необходимо задать вариацию обобщенной координаты  $\delta x$  и, вычислив возможную работу только от действия силы  $F \llcorner$ , разделить ее на  $\delta x$  :

$$Q \llcorner = \frac{F \llcorner \delta x}{\delta x} = F_0 \sin \llcorner \phi t + \beta \rceil.$$

**2. Кинематическое возбуждение** (рис. 1.7, б). Вынужденные колебания возникают в результате задаваемого извне перемещения точки крепления пружины  $s \llcorner = s_0 \sin \llcorner \phi t + \beta \rceil$ , не зависящего от параметров системы.

Изменение условной потенциальной энергии пружины при одновременном перемещении ее концов равно

$$\Pi' = 1/2 c \lambda^2 = 1/2 c \llcorner -s \llcorner^2.$$

Тогда

$$Q_{\Pi'} = \frac{\partial \Pi'}{\partial x} = -cx + cs \llcorner = Q_{\Pi} + Q \llcorner,$$

$$\text{где } Q_{\Pi} = -cx; \quad Q \llcorner = cs_0 \sin \llcorner \phi t + \beta \rceil.$$

**3. Инерционное возбуждение.** Возможны два случая.

**Случай А.** Вынужденные относительные колебания (рис. 1.7, в). Механическая система находится на подвижном основании, перемещение которого, независимое от параметров системы, задается извне, причем необходимо исследовать относительные (по отношению к подвижному основанию) колебания.

Система координат, связанная с подвижным основанием, движется вместе с ним поступательно, прямолинейно, но неравномерно. Поэтому при составлении дифференциального уравнения вынужденных относительных колебаний необходимо учитывать переносную силу инерции  $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e$  направление которой противоположно направлению

переносного ускорения. Переносное ускорение  $a_e = \ddot{s}$ , при этом считается сонаправленным с  $s$ .

Обобщенная сила  $Q$  будет определяться  $\Phi_e$  т. е.

$$Q = \frac{-m\ddot{s} \frac{\partial x}{\partial s}}{\frac{\partial x}{\partial s}} = -m\ddot{s} = mp^2 s_0 \sin(pt + \beta).$$

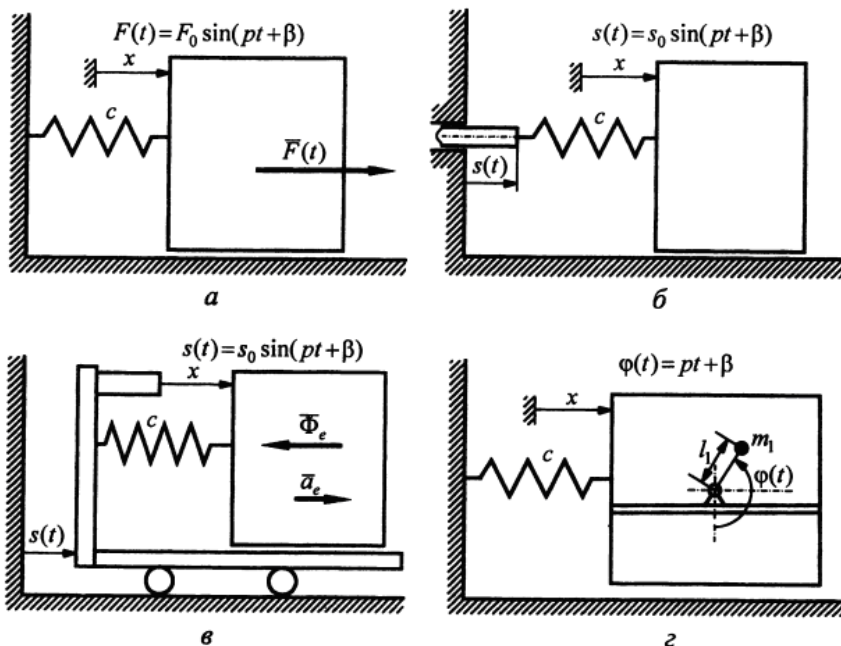


Рис. 1.7

**Случай В.** Вынужденные колебания, вызываемые вращающимся эксцентриком (рис. 1.11, г). Тело скреплено с эксцентриком, имеющим массу  $m_1 \ll m$ , эксцентриситет  $l_1$  и вращающимся с постоянной угловой скоростью. Обозначив через  $\varphi = pt + \beta$  угол отклонения эксцентрика от вертикали, выразим  $Q$  через проекцию на горизонталь центробежной силы  $m_1 p^2 l_1$ :

$$Q = \frac{m_1 p^2 l_1 \sin(pt + \beta) \frac{\partial x}{\partial s}}{\frac{\partial x}{\partial s}} = -m\ddot{s} = m_1 p^2 l_1 \sin(pt + \beta).$$

Отметим, что при инерционном возбуждении колебаний, в отличие от силового и кинематического возбуждений, амплитуда  $Q_0$  обобщенной силы пропорциональна  $p^2$ .

Приведенные примеры, естественно, не охватывают все способы возбуждения вынужденных колебаний.

### **Вынужденные колебания при отсутствии вязкого сопротивления**

При гармоническом возбуждении, согласно (1.7), дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$a\ddot{q} + cq = Q_0 \sin(\omega t + \beta)$$

или

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f_0 \sin(\omega t + \beta), \quad (1.16)$$

где  $f_0 = Q_0/a$ .

### **Силовое и кинематическое возбуждения колебаний**

Известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения (1.16) можно представить в виде суммы общего решения  $q_1$  однородного уравнения  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$  и частного решения  $q_2$  неоднородного уравнения:

$$q = q_1 + q_2 \quad (1.17)$$

Общее решение однородного уравнения

$$q_1 = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

Частное решение неоднородного уравнения определяется в зависимости от соотношения частот свободных колебаний и возмущающей силы. Возможны два случая: отсутствие резонанса  $p \neq \omega$  и резонанс  $p = \omega$ .

**1. Отсутствие резонанса.** В этом случае ( $p \neq \omega$ ) частное решение следует искать в виде

$$q_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta),$$

где  $A$  — искомая постоянная величина.

Подстановка  $q_2$  в (1.16) приводит к соотношению

$$A_2(\omega^2 - p^2) = f_0,$$

откуда

$$A_2 = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2}.$$

В соответствии с (1.17) общее решение уравнения (1.16) будет иметь вид

$$q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin \omega t + \beta, \quad (1.18)$$

или

$$q = A \sin \omega t + \alpha + \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin \omega t + \beta. \quad (1.19)$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определим из начальных условий (1.10), используя полное решение (1.18):

$$C_1 = q_0 - \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin \beta; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega} - \frac{f_0 p}{\omega(\omega^2 - p^2)} \cos \beta.$$

При необходимости произвольные постоянные  $A$  и  $\alpha$  можно вычислить через  $C_1$  и  $C_2$ .

Как следует из (1.18) и (1.19), движение состоит из двух гармонических колебаний с частотами  $\omega$  и  $p$  соответственно.

Первые (с частотой  $\omega$ ) можно по аналогии со случаем отсутствия возмущающей силы условно назвать **свободными колебаниями**, а вторые (с частотой  $p$ ) — **вынужденными колебаниями системы**.

Условность названия «свободные колебания» связана с тем, что определяющие их произвольные постоянные зависят не только от начальных условий  $q_0, \dot{q}_0$ , но и от параметров возмущающей силы  $f_0, p, \beta$ , и, следовательно, первые колебания в решении фактически также являются вынужденными колебаниями. Однако данное название получило широкое распространение лишь потому, что вторые колебания имеют частоту  $p$  возмущающей силы, в то время как первые — частоту  $\omega$  свободных колебаний (собственную частоту).

Отметим, что в реальных системах, где всегда присутствуют силы вязкого сопротивления, колебания с частотой  $\omega$  со временем затухают и устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные вынужденные колебания с частотой  $p$ , т. е.

$$q = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2} \sin(\omega t + \beta).$$

Если  $p < \omega$ , то установившиеся вынужденные колебания будут совпадать по фазе с возмущающей силой, если же  $p > \omega$ , то вынужденные колебания будут находиться в **противофазе** (сдвинуты по фазе на  $\pi$ ) по отношению к возмущающей силе.

$$\text{Введем амплитуду вынужденных колебаний } A_2 = \frac{f_0}{|\omega^2 - p^2|}.$$

Установившиеся вынужденные колебания можно представить в виде

$$q = A_2 \sin(\omega t + \beta - \gamma), \quad (1.20)$$

где  $\gamma$  — **сдвиг по фазе** вынужденных колебаний от колебаний возмущающей силы,

$$\gamma = \begin{cases} 0 & p < \omega; \\ \pi & p > \omega. \end{cases}$$

**2. Резонанс.** В случае совпадения частоты возмущающей силы с частотой свободных колебаний (собственной частотой) возникает явление **резонанса**.

При отсутствии сил вязкого сопротивления в случае резонанса амплитуда вынужденных колебаний, нарастая во времени, стремится к бесконечности. Это объясняется тем, что, если колебания происходят с собственной частотой, то инерционные силы уравниваются квазиупругими ( $kp^2 = c$ ) при любых амплитудах колебаний. Возмущающая сила оказывается при этом неуравновешенной и увеличивает амплитуду колебаний.

Будем искать частное решение уравнения (1.16) при  $p = \omega$  в виде

$$q_2 = Gt \cos(\omega t + \beta).$$

Определив  $\ddot{q}_2 = -2Gp \sin(\omega t + \beta) - Gtp^2 \cos(\omega t + \beta)$  и подставив его вместе с  $q_2$  в (1.16), получим

$$-2Gp \sin(\omega t + \beta) = f_0 \sin(\omega t + \beta).$$

Отсюда

$$G = -f_0/2p$$

и, следовательно,

$$q_2 = -\frac{f_0 t}{2p} \cos \left( pt + \beta \right) \approx \frac{f_0 t}{2p} \sin \left( pt + \beta - \frac{\pi}{2} \right).$$

Анализируя это решение, можно сделать вывод, что, с одной стороны, вынужденные колебания при резонансе смещены по фазе от возмущающей силы на  $\pi/2$ . С другой стороны, можно заметить, что вынужденные колебания при резонансе происходят с нарастающей пропорционально времени амплитудой. Зависимость  $q_2$  представлена на рис. 1.8.

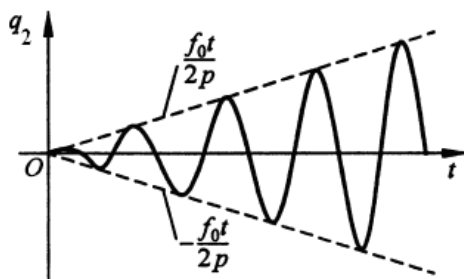


Рис. 1.8

Отметим, однако, что в реальной колебательной системе, во-первых, всегда имеется сопротивление, во-вторых, при достижении больших амплитуд колебаний нарушается допущение о их малости и становятся существенными нелинейные восстанавливающие силы. Все это приводит к тому, что амплитуда колебаний при резонансе в реальной колебательной системе хотя и может достигать больших значений, но не является неограниченно возрастающей.

Резонанс, сопровождающийся нарастанием амплитуды колебаний пусть до конечных, но больших значений, может стать причиной разрушения конструкции или возникновения опасных напряжений, сокращающих срок ее службы. Поэтому при проектировании машиностроительных конструкций надо, по возможности, избегать резонанса.

### ***Инерционное возбуждения колебаний***

При инерционном возбуждении колебаний амплитуда силы пропорциональна  $p^2$  и выражение для установившихся вынужденных колебаний имеет вид:



$$q = A_2 p^2 \sin(\omega t + \beta - \gamma).$$

### **Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления**

При гармоническом возбуждении, согласно (1.7), дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_0 \sin(\omega t + \beta),$$

или

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 \cdot q = f_0 \sin(\omega t + \beta). \quad (1.21)$$

#### **Силовое и кинематическое возбуждения колебаний**

Решение (1.21) будем искать в виде суммы (1.17) общего решения однородного уравнения  $\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega^2 \cdot q = 0$  и частного решения неоднородного уравнения.

Выше было показано, что общее решение однородного уравнения может быть представлено в зависимости от соотношения между  $\varepsilon$  и  $\omega$  в одной из трех форм:

$$q_1 = e^{-\varepsilon t} [C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)] \quad \text{при } \varepsilon < \omega$$

$$q_1 = e^{-\varepsilon t} [C_1 + C_2 t] \quad \text{при } \varepsilon = \omega$$

$$q_1 = e^{-\varepsilon t} [C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}] \quad \text{при } \varepsilon > \omega$$

Для определения частного решения уравнения (1.21) воспользуемся методом комплексных амплитуд. Частное решение будем искать в виде:

$$q_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta),$$

где  $A_2$  — искомая постоянная величина.

Подстановка  $q_2$  в (1.21) приводит к соотношению

$$A_2 (\omega^2 - p^2 + 2\varepsilon ip) = f_0,$$

откуда

$$A_2 = \frac{f_0}{\omega^2 - p^2 + 2\varepsilon ip}.$$

Колебания с частотой  $\omega$  (решение однородного уравнения) со временем затухают и устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные вынужденные колебания с частотой  $p$ . В этом случае говорят об **установившихся вынужденных колебаниях**.

$$q = G \sin(\omega t + \beta - \gamma),$$

где 
$$G = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\varepsilon^2 p^2}}, \quad \gamma = \arctg \frac{2\varepsilon p}{\omega^2 - p^2}.$$

### Основные свойства вынужденных колебаний

На основании решения (1.21) можно сформулировать основные свойства установившихся вынужденных колебаний при наличии линейного сопротивления.

**Вынужденные колебания не затухают. Их частота совпадает с частотой возмущающей силы. Вынужденные колебания и при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий.**

Амплитуда и сдвиг фаз вынужденных колебаний зависят от частоты собственных и вынужденных колебаний и коэффициента затухания. Чем больше коэффициент затухания при прочих равных условиях, тем меньше амплитуда вынужденных колебаний. **Незатухающий характер вынужденных колебаний** при линейном сопротивлении – главное отличие их от собственных колебаний, которые при действии линейного сопротивления всегда затухают, сохраняя колебательный характер, или затухают почти монотонно.

Амплитуда  $G$  установившихся вынужденных колебаний и сдвиг по фазе  $\gamma$  зависят от соотношения между частотами  $p$  и  $\omega$ , и от коэффициента затухания  $\varepsilon$ .

**Безразмерным коэффициентом затухания  $d$**  называют отношение  $d = 2\varepsilon/\omega$ . Если  $\varepsilon \ll \omega$ , то безразмерный коэффициент затухания можно связать с логарифмическим декрементом колебаний:  $d \approx \lambda/\pi$ .

### Инерционное возбуждения колебаний

При инерционном возбуждении колебаний амплитуда силы пропорциональна  $p^2$  и выражение для установившихся вынужденных колебаний имеет вид:

$$q = Gp^2 \sin(\omega t + \beta - \gamma).$$

## 1.6. Малые свободные колебания механических систем с двумя степенями свободы

В частном случае системы с двумя степенями свободы квадратичные формы  $T$ ,  $\Pi$  и  $\Phi$  будут соответственно равны

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2); \quad \Pi = \frac{1}{2} (c_{11} \dot{q}_1^2 + c_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + c_{22} \dot{q}_2^2);$$

$$\Phi = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{22} \dot{q}_2^2),$$

а дифференциальные уравнения малых колебаний примут вид:

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + b_{11} \dot{q}_1 + b_{12} \dot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = Q_1 \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + b_{21} \dot{q}_1 + b_{22} \dot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 = Q_2 \end{cases}$$

Ограничимся рассмотрением свободных колебаний консервативной механической системы. Дифференциальные уравнения малых колебаний примут вид:

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = 0 \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 = 0 \end{cases}$$

Решение системы дифференциальных уравнений малых свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы около устойчивого положения равновесия может быть записано в виде

$$q_1 = A \sin \omega t + \alpha, \quad q_2 = B \sin \omega t + \alpha.$$

Подстановка этого решения в систему дифференциальных уравнений малых колебаний дает

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{11} \omega^2) A + (a_{12} - a_{12} \omega^2) B = 0 \\ (a_{12} - a_{12} \omega^2) A + (a_{22} - a_{22} \omega^2) B = 0 \end{cases}$$

Относительно величин  $A$  и  $B$  это система однородных алгебраических уравнений. Она имеет нетривиальное решение ( $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ ), когда определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11} \omega^2 & c_{12} - a_{12} \omega^2 \\ c_{12} - a_{12} \omega^2 & c_{22} - a_{22} \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = 0$$

Это биквадратное относительно  $\omega$  уравнение называется **уравнением частот**. При ограничениях, накладываемых на обобщенные коэффициенты инерции и жесткости теоремой Сильвестра, оно имеет два положительных корня  $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$ , которым соответствуют два решения системы дифференциальных уравнений малых колебаний:

$$q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$q_2 = B_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Таким образом, закон изменения каждой обобщенной координаты находится как сумма двух колебаний разной частоты, которые называются **главными колебаниями**. При этом, как следует из предыдущего изложения, амплитуды главных колебаний связаны между собой соотношениями

$$\mu_i = \frac{B_i}{A_i}, \quad \mu_i = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega^2}{c_{12} - a_{12}\omega^2}, \quad i = 1, 2,$$

где  $\mu_i$  — **коэффициенты формы главных колебаний**.

В итоге, уравнения малых колебаний механической системы с двумя степенями свободы имеют вид

$$q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$q_2 = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Амплитуды  $A_1$ ,  $A_2$  и начальные фазы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  соответствующих колебаний определяются из начальных условий.

### 1.7. Вынужденные колебания механических систем с двумя степенями свободы

Пусть к механической системе помимо консервативных сил приложена возмущающая сила. Особый интерес представляет случай, когда обобщенная сила, соответствующая одной из обобщенных координат, изменяется с течением времени по гармоническому закону

$$Q_1 = H_1 \sin \varphi t.$$

В этом случае дифференциальные уравнения движения механической системы принимают вид

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = H_1 \sin \varphi t, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases}$$

Общее решение системы линейных неоднородных, в данном случае, дифференциальных уравнений ищем как сумму двух решений: общего решения системы однородных дифференциальных уравнений и частного решения системы неоднородных дифференциальных уравнений.

С учетом зависимости возмущающей силы от времени частное решение может быть записано в виде:

$$q_1 = C_1 \sin \varphi t, \quad q_2 = C_2 \sin \varphi t.$$

Подстановка этого решения в систему дифференциальных уравнений дает

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}p^2)C_1 + (c_{12} - a_{12}p^2)C_2 = H_1, \\ (c_{12} - a_{12}p^2)C_1 + (c_{22} - a_{22}p^2)C_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему по правилу Крамера, получим

$$C_1 = \frac{A_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{A_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}p^2 & c_{12} - a_{12}p^2 \\ c_{12} - a_{12}p^2 & c_{22} - a_{22}p^2 \end{vmatrix},$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} H_1 & c_{12} - a_{12}p^2 \\ 0 & c_{22} - a_{22}p^2 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}p^2 & H_1 \\ c_{12} - a_{12}p^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Величина  $\Delta = \Delta(\varphi)$  совпадает с левой частью уравнения частот и стремится к нулю при приближении частоты возмущающей силы с одной из частот собственных колебаний  $\omega_1$  или  $\omega_2$ . При этом коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  стремятся к бесконечности. Таким образом, в случае колебаний системы с двумя степенями свободы существуют две резонансные частоты  $p_1 = \omega_1$  и  $p_2 = \omega_2$ .

Общее решение системы дифференциальных уравнений вынужденных колебаний при  $p_1 \neq \omega_1$  и  $p_2 \neq \omega_2$  имеет вид:

$$q_1 = A_1 \sin(\varphi_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\varphi_2 t + \alpha_2) + \frac{A_1}{\Delta} \sin(\varphi t),$$

$$q_2 = \mu_1 A_1 \sin(\varphi_1 t + \alpha_1) + \mu_2 A_2 \sin(\varphi_2 t + \alpha_2) + \frac{A_2}{\Delta} \sin(\varphi t).$$

## 1.8. Понятие о виброзащите.

### Динамический гаситель колебаний.

Исключение нежелательных колебаний в механических системах называется **виброзащитой (демпфированием)**. Используемые при этом технические устройства называются **виброгасителями (демпферами)**. Рассмотрим принцип работы одного из таких устройств — **динамического гасителя колебаний**.

Параметры колеблющейся системы можно подобрать таким образом, чтобы амплитуда вынужденных колебаний, соответствующих первой обобщенной координате, обращалась в ноль  $C_1 = 0$ . Такое явление называется **антирезонансом**. Это имеет место, если  $\Delta_1 = 0$ , т.е.

$$H_1(C_{22} - a_{22}p^2) = 0 \quad \text{или} \quad p = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}$$

Принцип работы динамического гасителя основан на использовании явления антирезонанса, когда действие периодически изменяющейся возмущающей обобщенной силы, соответствующей одной координате, нейтрализуется действием потенциальной обобщенной силы, соответствующей другой координате.

**Пример 1.3.** Найти условие гашения вынужденных колебаний упругой балки жесткостью  $c_1$ , на которой установлен мотор 1 (рис. 1.9) массой  $m_1$ , за счет подвешивания на пружине жесткостью  $c_2$  дополнительного груза 2 массой  $m_2$ .

Сила давления мотора на балку, создаваемая движущимися внутри мотора неуравновешенными массами, изменяется по гармоническому закону  $H \sin(\varphi t)$  и определяет возмущающую силу  $Q$ , действующую на балку с заданной амплитудой  $H$  и частотой  $p$  (рис. 1.10).

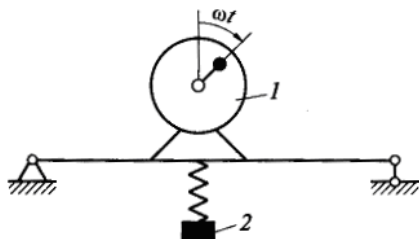


Рис. 1.9

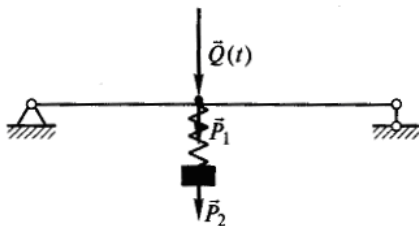


Рис. 1.10

Выберем обобщенные координаты:  $y$  — прогиб балки, отсчитываемый от положения ее равновесия;  $\xi$  — относительное отклонение груза 2 на пружине от положения его статического равновесия.

Кинетическая энергия данной механической системы имеет вид

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{\xi} + \dot{y})^2}{2}.$$

Потенциальная энергия определяется выражением

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 y^2 + \frac{1}{2} c_2 (\xi - y)^2.$$

Возмущающая сила, действующая на груз,  $Q(\xi) = H \sin \phi t$ .

В итоге дифференциальные уравнения движения механической системы принимают вид

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{y} + m_2 \ddot{\xi} + (c_1 + c_2) y - c_2 \xi = H \sin \phi t, \\ m_2 \ddot{y} + m_2 \ddot{\xi} - c_2 y + c_2 \xi = 0. \end{cases}$$

Условие антирезонанса  $H_1 (c_{22} - a_{22} p^2) = 0$ , дает  $m_2 - C_2 p^2 = 0$ .

При выполнении этого условия вынужденных колебаний мотора не будет.

Чтобы дополнительная масса выполняла роль гасителя колебаний, «парциальная» частота собственных ее колебаний (при неподвижной первой

массе) должна совпадать с частотой возмущающей силы  $p = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$ .

На практике преимущественно применяют демпфирующие устройства с использованием сил вязкого сопротивления.

## Раздел 2. Теория удара

### 2.1 Основное уравнение теории удара

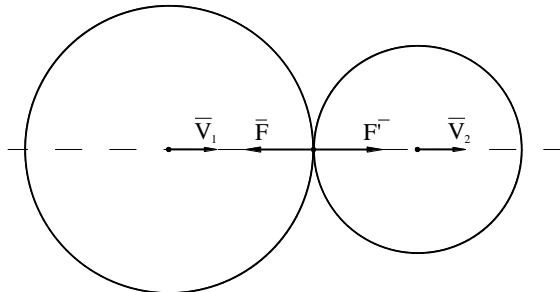
При движении тел нередко наблюдаются такие явления, при которых отдельные материальные точки внезапно изменяют свои скорости за очень короткий промежуток времени. (До сих пор, мы рассматривали движение, при котором скорости точек тела изменялись непрерывно). Если импульс любой силы  $\bar{F}_k$  за промежуток времени  $\tau$  представить в виде  $\bar{F}_k^{cp} \tau$ , где  $\bar{F}_k^{cp}$  - среднее значение силы за промежуток времени  $\tau$ , то теорема об изменении количества движения имеет вид:

$$m(\bar{V}_1 - \bar{V}_0) = \sum \bar{F}_k^{cp} \tau$$

Если интервал времени бесконечно мал, то при обычных силах приращение скорости  $\Delta \bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}_0$  тоже будет величиной бесконечно малой. Так происходят все непрерывные процессы. Если сила  $\bar{F}_k$  оказывается достаточно большой, порядка  $\frac{1}{\tau}$ , то приращение скорости за малый промежуток времени  $\tau$  будет величиной конечной.

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый промежуток времени  $\tau$  изменяются на конечную величину, называется *ударом*. Силы, изменяющие скорости точек тела в течение весьма малого промежутка времени (порядка десятой и меньше доли секунды), будем называть *ударными силами*  $\bar{F}_{y\partial}$  или *мгновенными*. Промежуток времени  $\tau$ , в течение которого происходит удар, назовём *временем удара*.

Общую нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке их соприкосновения будем называть *линией удара*.





Удар называют *центральный*, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара. Центральный удар называют *прямым*, если скорости центров масс соударяющихся тел в начале удара направлены по линии удара. Ударные силы очень велики и за время удара изменяются в значительных пределах, поэтому в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не ударные силы, а их импульсы. Ударный импульс равен

$$\bar{S}_{y\partial} = \int_0^{\tau} \bar{F}_{y\partial} dt = \bar{F}_{y\partial}^{cp} \tau.$$

Обозначим скорость в начале удара  $\bar{V}$ , а скорость в конце удара  $\bar{u}$ . Теорема об изменении количества движения примет вид:

$$m(\bar{u} - \bar{V}) = \sum \bar{S}_k. \quad (*)$$

Изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов. Уравнение (\*) называется *основным уравнением теории удара*.

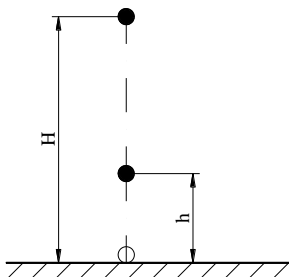
Величина  $k$ , равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется *коэффициентом восстановления при ударе*:

$$k = \frac{u}{V}.$$

В зависимости от природы тел коэффициент восстановления изменяется в пределах  $0 \leq k \leq 1$ . При  $k=0$  удар называется *абсолютно неупругим*, кинетическая энергия тела теряется на его деформацию и нагревание. В случае  $k=1$  удар называется *абсолютно упругим*, кинетическая энергия тела полностью восстанавливается. При  $0 < k < 1$  происходит удар тел средней упругости и этот удар называют *упругим*.

Экспериментально величину  $k$  можно найти, если известна высота падения тела  $H$  и высота его подъема после удара  $h$ , которую можно определить. Тогда по формуле Галилея

$$k = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$



Можно сделать следующие выводы:

- 1) действием неударных сил за время удара можно пренебречь;
- 2) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь;
- 3) изменения скоростей точек тела за время удара определяется основным уравнением теории удара.

## 2.2 Общие теоремы теории удара

*Теорема об изменении количества движения системы при ударе*

Уравнение, полученное для теоремы об изменении количества движения системы, сохраняет свой вид и для случая удара. Так как импульсами обычных сил при ударе пренебрегают, то в правой части останутся только импульсы ударных сил. Математическое выражение теоремы принимает вид:

$$\bar{K}_1 - \bar{K}_0 = \sum \bar{S}_k^e.$$

Изменение количества движения системы за время удара равно геометрической сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.

В проекциях на оси координат имеем

$$\sum m_k u_{kx} - \sum m_k V_{kx} = \sum S_{kx}^e,$$

$$\sum m_k u_{ky} - \sum m_k V_{ky} = \sum S_{ky}^e,$$

$$\sum m_k u_{kz} - \sum m_k V_{kz} = \sum S_{kz}^e.$$

Эти уравнения определяют изменение проекции скорости центра масс на любую ось при ударе.

*Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе*

Изменение кинетического момента механической системы относительно любого неподвижного центра при ударе равно геометрической сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно того же центра.

$$\bar{L}_O - \bar{L}_O^{(0)} = \sum \bar{M}_O(\bar{S}_k^E).$$

Векторному уравнению соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$L_x - L_x^{(0)} = \sum M_x(\bar{S}_k^E),$$

$$L_y - L_y^{(0)} = \sum M_y(\bar{S}_k^E),$$

$$L_z - L_z^{(0)} = \sum M_z(\bar{S}_k^E),$$

т.е. изменение кинетического момента механической системы относительно любой оси при ударе равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно той же оси.

### 2.3 Прямой центральный удар двух тел

Удар двух тел, при котором скорости центров масс в начале удара направлены по общей нормали к поверхностям этих тел.

При центральном ударе двух тел коэффициент восстановления равен отношению модулей относительной скорости тел после удара и до него:

$$k = \frac{u_2 - u_1}{V_1 - V_2}.$$

Ударный импульс при этом будет равен

$$S = (1 + k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2).$$

При неупругом ударе  $k = 0$  удар имеет только первую фазу. В этом случае после удара тела движутся совместно со скоростью, определяемой по формуле:

$$u = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}.$$

Модуль ударного импульса определяется выражением:

$$S_1 = S_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2).$$

При абсолютно упругом ударе  $k = 1$ . В этом случае формулы, определяющие скорости тел после удара, принимают вид

$$u_1 = \frac{2(m_1 V_1 + m_2 V_2)}{m_1 + m_2} - V_1,$$

$$u_2 = \frac{2(m_1 V_1 + m_2 V_2)}{m_1 + m_2} - V_2.$$

Модуль ударного импульса, приложенного к каждому телу, определяется выражением:

$$S = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_1 - V_2).$$

При абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при неупругом, что объясняется добавлением к импульсу фазы деформации импульса фазы восстановления такого же модуля.

## 2.4 Потеря кинетической энергии при ударе

Из-за остаточных деформаций и нагревания тел при ударе происходит частичная потеря начальной кинетической энергии соударяющихся тел.

Начальная кинетическая энергия тел

$$T_0 = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тел в конце удара

$$T = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Потеря кинетической энергии при ударе равна

$$T_0 - T = (1 - k^2) \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (V_1 - V_2)^2.$$

При абсолютно упругом ударе ( $k=1$ ), потери кинетической энергии не происходит.

При неупругом ударе ( $k=0$ ) и  $u_1 = u_2 = u$  получим

$$T_0 - T = \frac{m_1}{2} (V_1 - u)^2 + \frac{m_2}{2} (V_2 - u)^2.$$

Теорема Карно: кинетическая энергия, потерянная телами при неупругом ударе, равна энергии тел, соответствующей их потерянными скоростям.